給電腦科學家的
邏輯系統

版權 2012 favonia

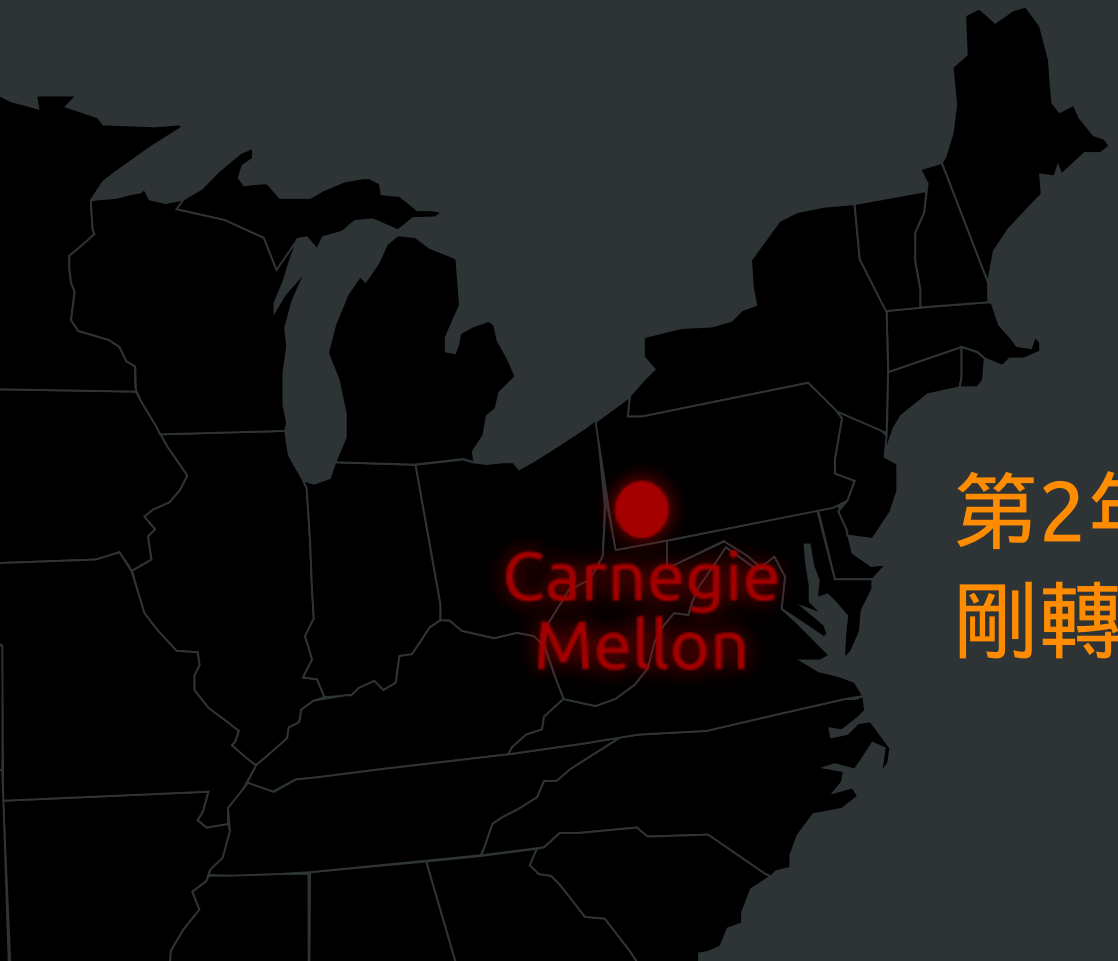
本著作採用創用 CC BY-SA 3.0 台灣授權
http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/tw/
圖案引自 Open Clip Art Library, 屬公有領域

你只需自由字體即可正確顯示本文件！

Gentium 及 Ubuntu 字體採 OFL 授權

文泉驛字體採 GPL（附內嵌條款）授權

關於我 favonia

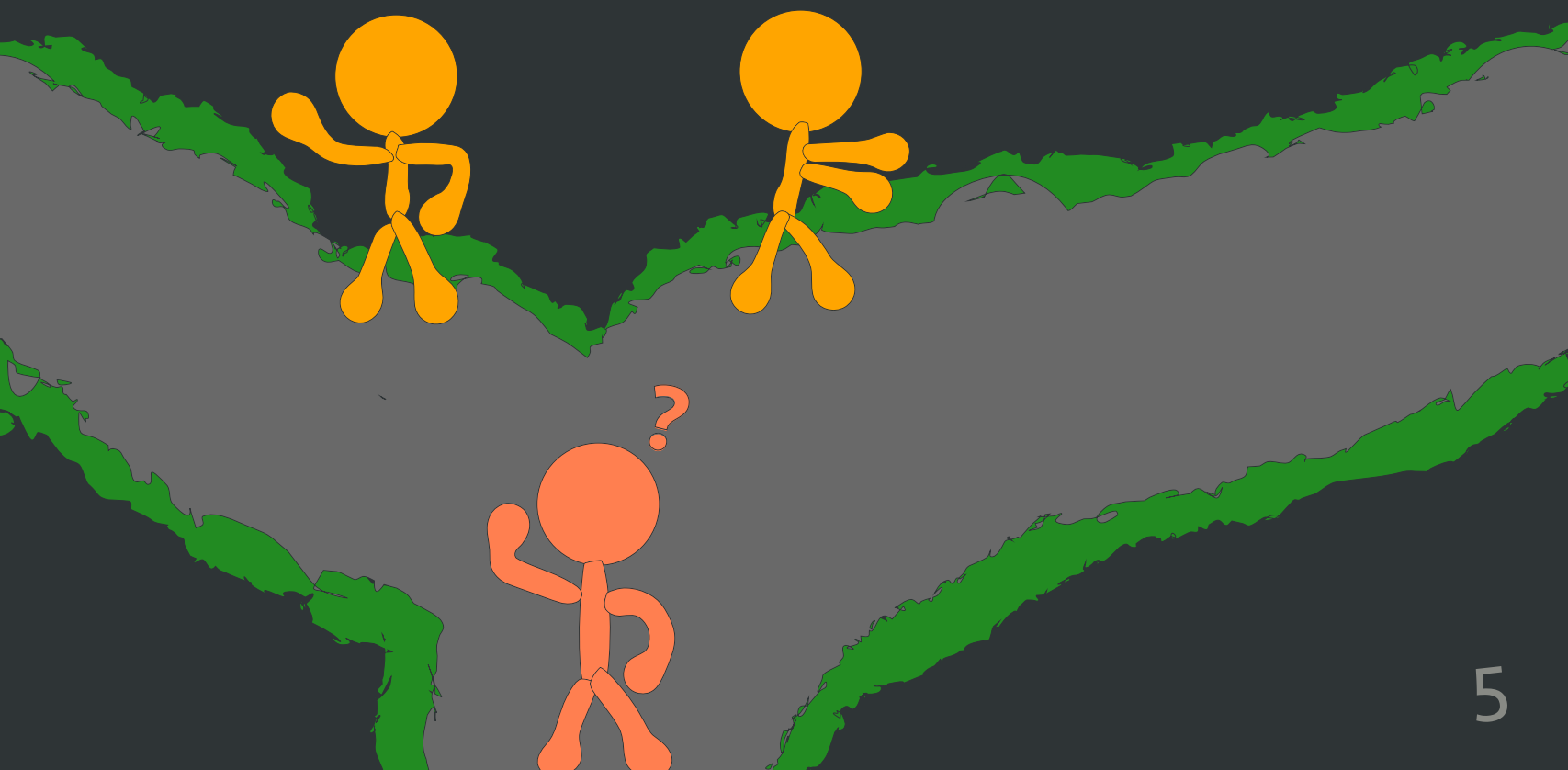


第2年博士生
剛轉程式語言領域

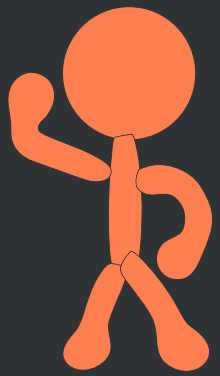
聯絡我 favonia

gmail
github
freenode #haskell.tw
不知名空間

楔子0



楔子0



如果我問另一人 NP=P
他會回答是嗎？

……

楔子0

楔子1

楔子1

if $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ then $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$

楔子1

if $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ then $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$

otherwise $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}} = 2$

楔子1

```
if ( √2^√2 ) {
    return √2 √2
} else {
    return √2^√2 √2
}
```

楔子1

if ($\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$) { ?

楔子1

a 或 a ?

如果數字用 Cauchy 序列表示，
無法判定！

楔子1

if ($\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$) { ?

楔子1

if ($\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$) {

?

Gelfond-Schneider:

不, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$

PS: 應該不是直覺數學

楔子1

if ($\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$) { ?

Gelfond-Schneider:

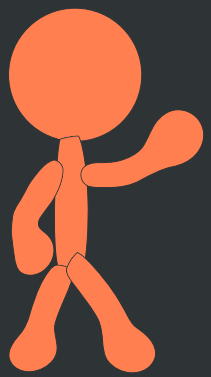
不, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$

PS: 應該不是直覺數學

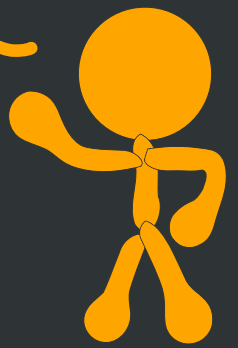
return $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ $\sqrt{2}$

楔子2

我發現有個整數，
只要檢查他是不是
質數就知道 NP ≟ P



好厲害！

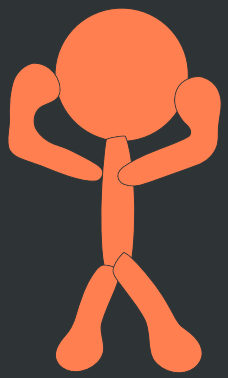


那個數字這樣定的...

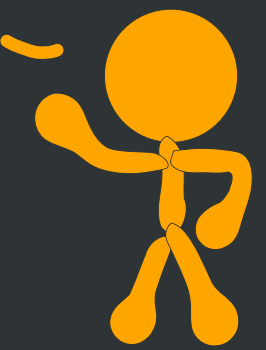
楔子2

如果 NP = P 那定 x = 3

如果 NP ≠ P 那定 x = 4



這是作弊吧！



楔子2

增加的條件

(1) 可計算
(2) 或多項式時間內可以算完
(3) 或 log 空間內可以算完
(4) 或...

直覺主義

Brouwer:

數學是心智上的構造。

邏輯是數學的一部份。

直覺主義

Brouwer:

數學是心智上的構造。

邏輯是數學的一部份。

想像對話

Heyting:

我想把它形式化看看...

Brouwer:

隨便你 = =

直覺主義

Heyting 做出的直覺邏輯，
形式上不把排中律當公理，
這差異源自於不同哲學信仰。

直覺主義

Heyting 做出的直覺邏輯，
形式上不把排中律當公理，
這差異源自於不同哲學信仰。

↓

並沒有拒絕，只是不把它當公理

直覺主義

雖然直覺主義拒絕形式主義和邏輯主義，但是大家認為直覺邏輯符合直覺主義很多原則。

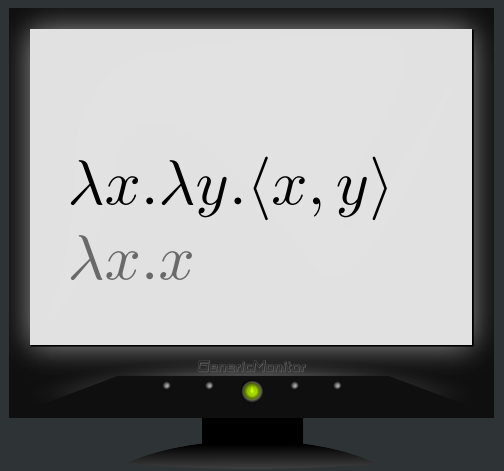
直覺主義

直覺主義

$$A \wedge B$$
$$\neg\neg(A \vee \neg A)$$
$$A \to B$$

直覺主義

$$A \wedge B$$
$$\neg\neg(A \vee \neg A)$$
$$A \to B$$



直覺主義

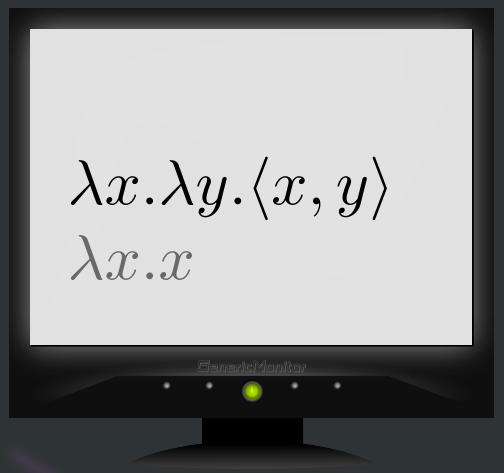
$$\neg\neg(A \wedge B)$$
$$A \vee \neg A$$
$$A \to B$$

CH 對應

$\lambda x.\lambda y.\langle x, y\rangle$

$\lambda x.x$

直覺主義

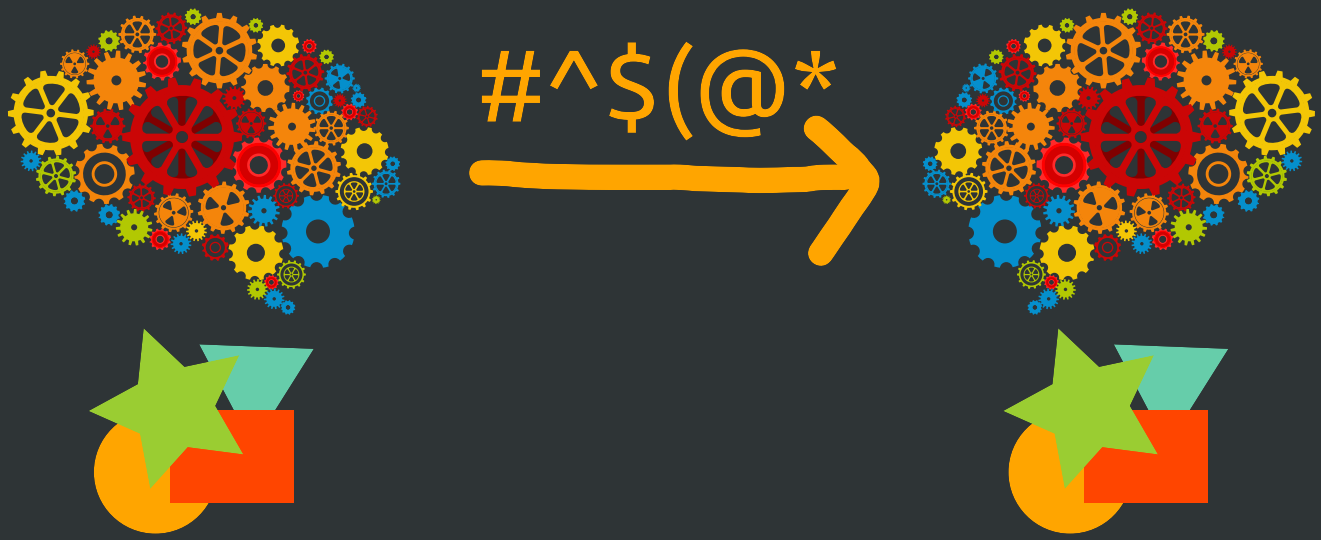


溝通

溝通

#^$(@*

溝通



溝通

#^$(@*

喔所以定理 X 是真的

溝通

(形式化版本)

形式證明

喔所以定理 X 是真的

溝通

喔所以問題 X
可以算

排中律

Brouwer:

排中律代表給定 A 我們有個萬用方法給出 A 的證明或是駁斥 A 的證明。（待續）

電腦科學：

萬用判定演算法？！

Brouwer:

...但現在有未解問題啊！

Gödel: ~非直覺主義

形式化後還有不可解的問題！

電腦科學：

有問題還不知道演算法或甚至不可判定。

直覺邏輯並沒有拒絕受限的排中律，例如「n > m 或 n ≤ m」會成立（歸納法）

↖ 歸納法可接受

電腦科學中有許多問題有演算法可以判定，例如要比較兩個正整數可以用遞迴。

無窮序列

Brouwer:

這裡我提出某兩種：一種自由發揮，一種符合某規則...

電腦科學：

先知 (oracle), 隨機位元串流，或是任何串流產生器...

Brouwer:

不管有沒有規則，我們都只能使用開頭有限個元素。

電腦科學：

任何串流在任何時候只會算出有限個元素。而且程式只能用算出來的部份。

不能偷看程式碼唷！

例：質數不斷算出下一個...
例：圓周率不斷逼近...
例：無法判定 Cauchy 串列
是否收斂到零。

電腦科學：

任何串流在任何時候只能算出有限個元素。而且程式只能用算出來的部份。

$$A \wedge B$$

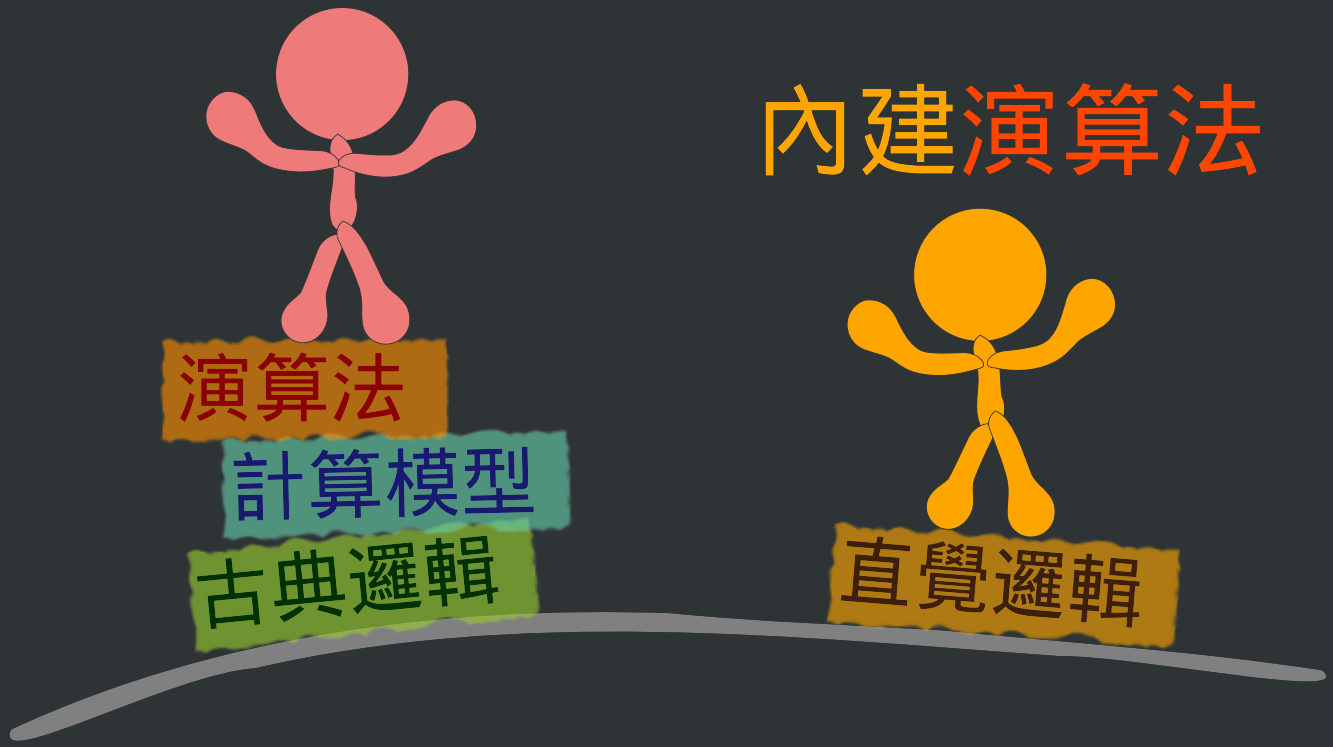
$$\neg\neg(A \vee \neg A)$$

$$A \to B$$

$\lambda x.\lambda y.\langle x, y\rangle$

$\lambda x.x$

CH 對應


內建演算法
演算法
計算模型
古典邏輯
直覺邏輯

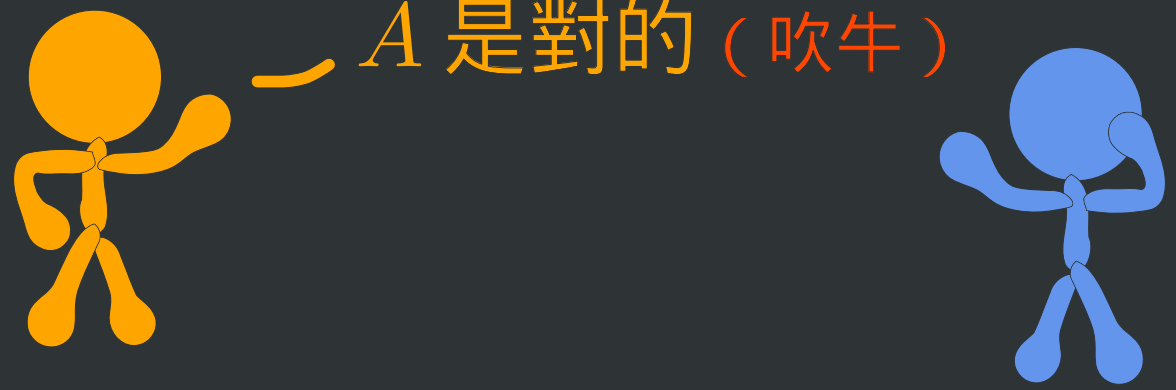
排中律

面面觀

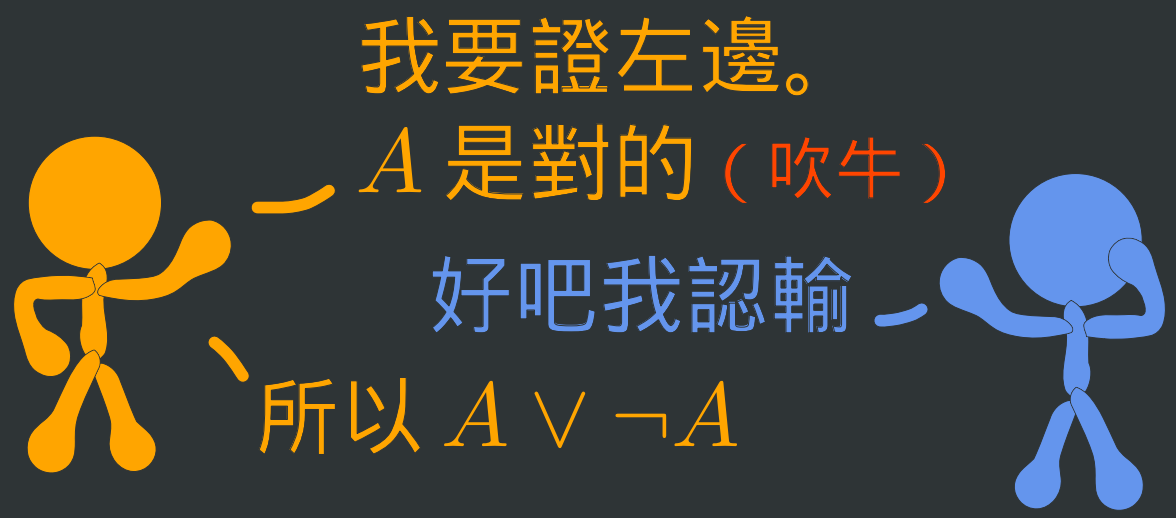
$A \vee \neg A$

我要證左邊。

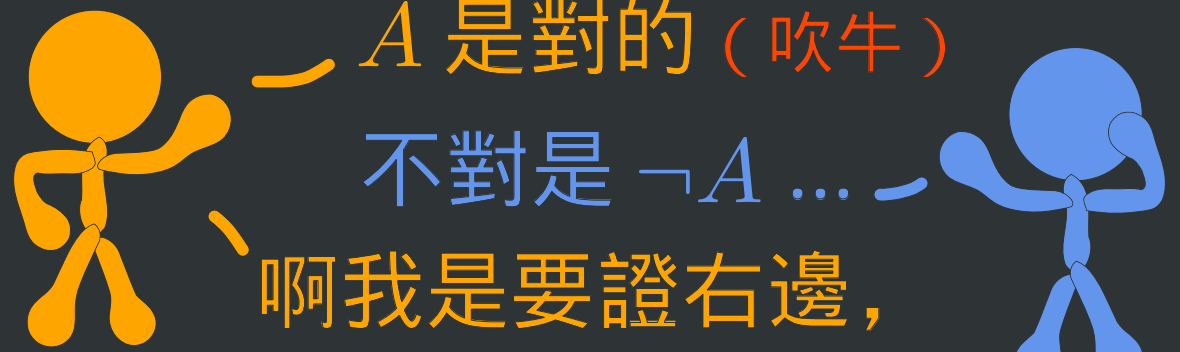
A 是對的（吹牛）



$A \vee \neg A$



$A \vee \neg A$



時光機！

C 的 jump（壞掉）

scheme 的 call/cc...

啊我是要證右邊，

其實 $\neg A$ 才是對的。

不能駁斥

先吹牛如何證明某東西，
等別人提出證據反駁時，
再拿著反駁坐時光機回到
過去把證明修改完成。

不能駁斥

先

反駁時，

再拿著反駁坐時光機回到過去把證明修改完成。

$$\neg A = A \to \bot$$

不能駁斥

先吹牛如何證明某東西，
等別人提出證據反駁時，
再拿著反駁坐時光機回到
過去把證明修改完成。

不能駁斥

先吹牛如何證明某東西，
等別人提出證據反駁時，
再拿著反駁坐時光機回到
過去把證明修改完成。

不能駁斥

古典邏輯的證明可以轉成
不能被駁斥的證明，例如...

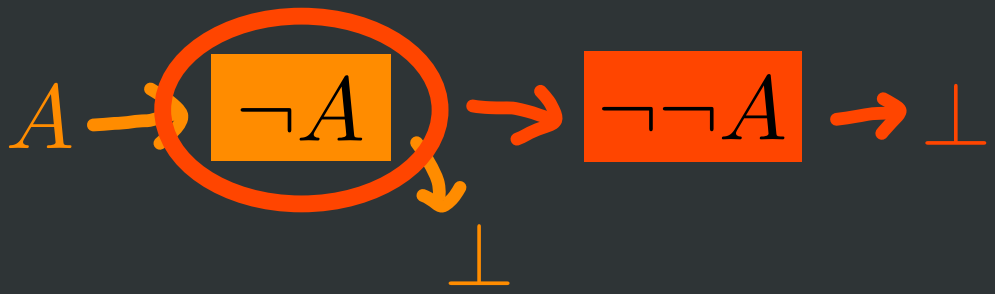
$$\neg\neg(A \vee \neg A)$$

不能　被駁斥

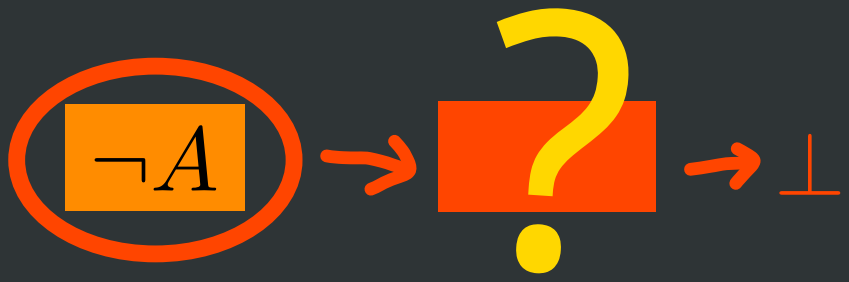
直覺邏輯中
可以證明！

不能駁斥

不能駁斥



不能駁斥



唯一的解釋是裡面似乎暗藏答案，可是就是拿不到確切的解答。

不能駁斥

直覺邏輯

回傳結果

古典邏輯（轉換過）

1. 乖乖回傳結果
2. 使用蟲洞 $\neg A$

（2 比 1 好用）

不能駁斥

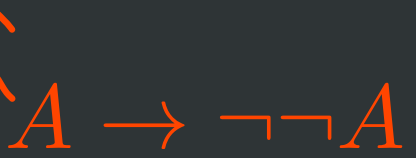
直覺邏輯

回傳結果

古典邏輯（轉換過）

1. 乖乖回傳結果
2. 使用蟲洞 $\neg A$

（2 比 1 好用）



不能駁斥

A　知道如何算

$\neg\neg A$　只知道如何駁斥駁斥
（一般數學結果）

符號上直接可以區分！

可計算實數

一點點點介紹

無窮序列

實數可以寫成一無窮序列
例如十進位，Cauchy 序列，間距表示法等等...

0.14285714285...
3.14159265359...

無窮序列

很多性質有限多位無法決定，
直覺主義不承認... 如三一律。

電腦也無法計算。例如無法
判定是否大於零。
0.000000000000???????...

無窮序列

但可以證明任何數大於零或小於0.01。

電腦也可以在有限時間內判定大於零或小於 0.01。

0.00X

無窮序列

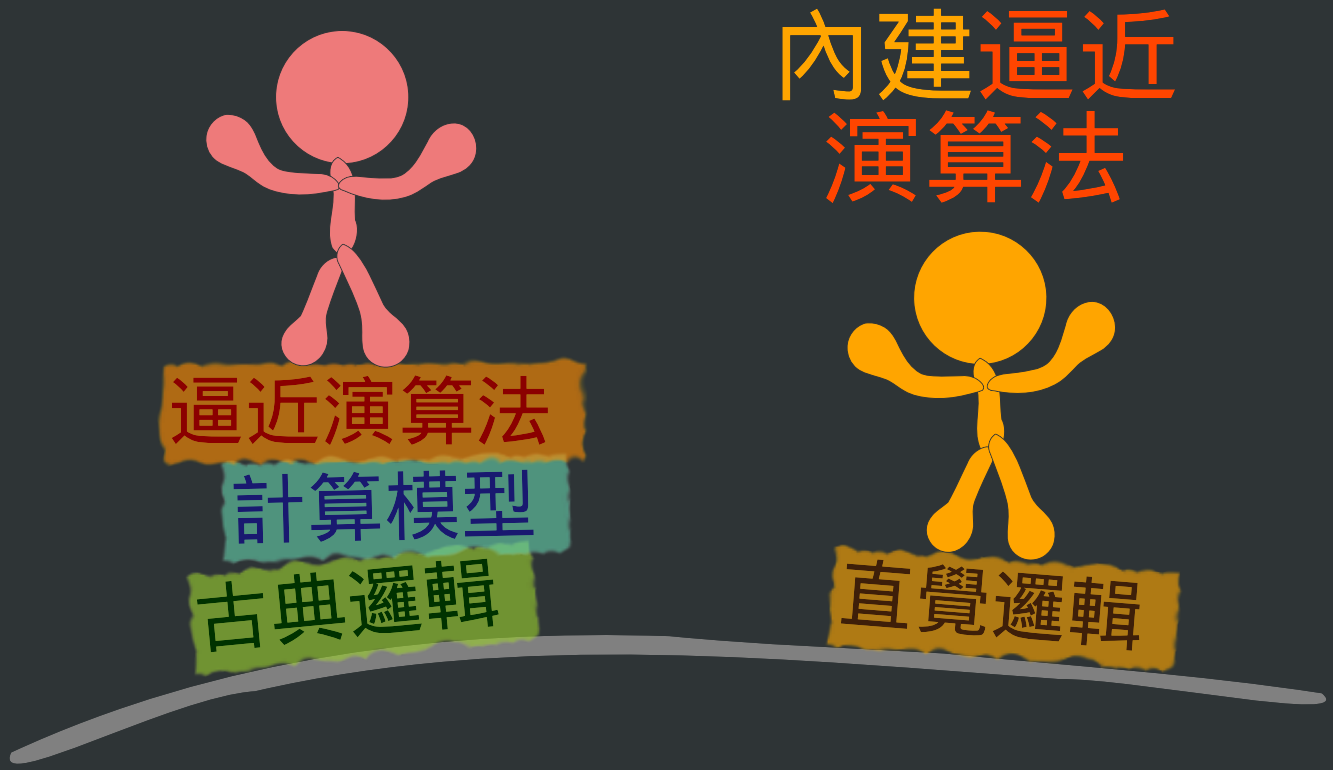
定理

可以建構的函式一定連續

定理

可以計算的函式一定連續

9.45124478996314 7XXXX


內建逼近
演算法
逼近演算法
計算模型
古典邏輯
直覺邏輯

無窮序列

十進位表示法比 Cauchy 序列差，乘3的第1位會算不出來。Cauchy 序列沒這問題。

0.3333333333??????...
0.999999999999...
1.000000000000...